① Calcul de Σ :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{propres}]{\text{valeurs}} \lambda_1 = 4 \text{ et } \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{valeurs singulières}}$$

② Calcul de V :

$$E_4 = \ker(A^T A - 4 I_2) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{bon}} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_0 = \ker(A^T A) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{\text{bon}} \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Alors

$$\boxed{V = \begin{array}{cc} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \\ \left(\begin{matrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{matrix} \right. & \left. \begin{matrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{matrix} \right) \end{array}}$$

③ <u>Calcul de U</u> : $\quad 4 = \lambda_1 > \lambda_2 = 0$

(i) $\bar{u}_j = \frac{A \cdot \bar{v}_j}{\sqrt{\lambda_j}}$ $\boxed{\text{si } \lambda_j > 0 !}$ $\rightarrow$ pour $j = 1$!!

$$\Rightarrow \bar{u}_1 = \frac{A \cdot \bar{v}_1}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Pour $\bar{u}_2$ et $\bar{u}_3$ il faut calculer une bon de $\mathrm{Ker}(A^T)$:

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

FER de A^T

$$\Longrightarrow \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_3} \right\} \Longrightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BON

et $A = U \Sigma V^T$ ✓

EXM Calculer SVD de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

① Calcul de Σ : $\to$ valeurs propres de A^TA

$$P_{A^TA}(\lambda) = \det(\underbrace{A^TA - \lambda I_3}_{})$$

$\in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

(calculs...)

$\boxed{\text{Obs}}$ $A = U \Sigma V^T$ une SVD de A

$\Rightarrow$ $A^T = V \Sigma^T \boxed{U^T}$ une SVD de A^T

(car $A^T = (U\Sigma V^T)^T = (V^T)^T \Sigma^T U^T = V \Sigma^T U^T$)

Au lieu de calculer $\boxed{\text{les valeurs singulières de } A}$ $= \Sigma$ on va calculer $\boxed{\text{les valeurs singulières de } A^T}$ $= \Sigma^T$:

$\Rightarrow$ on calcule les valeurs propres de $(A^T)^T A^T = \underline{AA^T}$?!

Or $\quad A.A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$!?!

$= \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\neq} A^T.A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Prop 14.9}}$ Les valeurs propres positives de A^TA et de $A.A^T$ sont les mêmes et elles ont la même multiplicité.

En plus

$$\det(AA^T - \lambda I_2) = \lambda^2 - 22\lambda + 120$$
$$= (\lambda - 12)(\lambda - 10)$$

Alors

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$$ ← même taille que A

② Calcul de V

(si l'on a calculé $A^T A$)

$$E_{12} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ bon $\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}\right\}$

$$E_{10} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

②' Calcul de U

(si l'on a calculé $A.A^T$)

On a besoin d'une base de chaque espace propre de $A.A^T$:

- $\mathrm{Ker}(AA^T - 12\, I_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \text{bon}\left\{\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$E_0 = \text{Ker}\begin{pmatrix}10&0&2\\0&10&4\\2&4&2\end{pmatrix} = \text{Ker}\begin{pmatrix}1&0&1/5\\0&1&2/5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \text{bon}\left\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{30}\\-2/\sqrt{30}\\5/\sqrt{30}\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}&-2/\sqrt{5}&-1/\sqrt{30}\\2/\sqrt{6}&1/\sqrt{5}&-2/\sqrt{30}\\1/\sqrt{6}&0&5/\sqrt{30}\end{pmatrix}$$

3 Calcul de U

$$\bar{u}_1 = \frac{A\bar{v}_1}{\sqrt{12}} = \frac{\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}}{\sqrt{12}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{A\bar{v}_2}{\sqrt{10}} = \frac{\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

- $\text{Ker}(AA^T - 10 I_2) = \text{Ker}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$$= \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

3' Calcul de V

(i) $$\bar{v}_1 = \frac{A^T\cdot\bar{u}_1}{\sqrt{12}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{A^T\bar{u}_2}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix}-2/5\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(ii) $\bar{v}_3 \longrightarrow \underline{\underline{\text{bon}}}$ de $\ker(A)$

$$= \ker \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

par ex. $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{EXM}}$ Calculer SVD de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$